

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут «Фізико-технічний факультет»

Затверджую

Заступник голови приймальної
комісії, проректор з науково-
педагогічної роботи Харківського
національного університету імені
В.Н. Каразіна

_____Олександр ГОЛОВКО

« ____ » _____ 2025 р.

ПРОГРАМА

вступного фахового іспиту у формі співбесіди

«Вища математика»

спеціальність: «Прикладна фізика та наноматеріали»

за освітніми програмами:

«Прикладна фізика»,

«Кіберфізичні ядерні технології»,

«Біомедичні нанотехнології»

Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти

**для вступу на навчання для здобуття ступеня бакалавра за іншою
спеціальністю (друга вища освіта),**

Харків 2025

Частина 1. Аналітична геометрія

Вектори, лінійні операції і системи координат.

Направлені відрізки і їх рівність. Визначення вектора, як класу рівних направлених відрізків. Дії над векторами. Орт.

Лінійна залежність векторів. Розмірності простору. Базис. Єдиність розкладання по базису. Координати вектора. Перетворення координат. Перетворення системи координат, що включають зміни орієнтації базису (дзеркальні відображення). Поняття про аксіальні і полярні вектори, скаляри і псевдоскаляри. Полярна, сферична і циліндрична системи координат.

Добутки векторів

Скалярний добуток векторів. Основні властивості скалярного добутку. Декартова система координат. Ортогональні проекції. Направляючі косинуси. Векторний добуток. Основні властивості векторного добутку. Змішаний добуток векторів. Основні властивості змішаного добутку. Подвійний векторний добуток векторів.

Пряма на площині. Площина та пряма в просторі.

Лінії і поверхні. Параметричне задавання ліній і поверхонь. Рівняння прямої на площині та у просторі. Циліндричні, конічні поверхні та поверхні обертання. Рівняння площини. Взаємне розташування прямої та площини в просторі.

Лінії другого порядку.

Канонічне рівняння параболі. Фокальний параметр, вершина і фокус параболі. Канонічне рівняння еліпса. Фокальний параметр, вершини і фокуси еліпса. Канонічне рівняння гіперболи. Рівнобічна гіпербола. Фокальний параметр, вершини і фокуси гіперболи. Загальні властивості еліпса, параболі та гіперболи.

Поверхні другого порядку.

Загальне рівняння поверхонь другого порядку. Класифікація поверхонь. Еліпсоїд. Канонічне рівняння. Еліпсоїди обертання. Гіперболоїд. Канонічне рівняння. Параболоїд. Канонічне рівняння. Еліптичний і гіперболічний параболоїди.

Частина 2. Вища алгебра

Лінійні простори. Алгебра матриць.

Визначення групи. Визначення та аксіоми поля. Визначення та аксіоми лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Визначення підпростору та лінійної оболонки системи векторів. Повні та лінійно незалежні системи векторів. Базис та розмірність лінійного простору. Ізоморфізм лінійних просторів.

Лінійний простір матриць. Алгебра матриць. Дії над матрицями.

Евклідові та унітарні простори.

Визначення скалярного добутку. Визначення евклідового простору. Нерівність Коші-Буняковського. Ортонормовані системи векторів. Процес ортогоналізації. Визначення унітарного простору. Ортогональне доповнення до підпростору.

Теорія визначників.

Лінійний та білінійні функціонали у лінійному просторі. Симетричні та антисиметричні білінійні функціонали. Полілінійні функціонали. Визначник квадратної матриці. Властивості визначників. Мінори та алгебраїчні доповнення. Методи обчислення визначників n -го порядку.

Системи лінійних рівнянь.

Формули Крамера. Обернена матриця та методи знаходження оберненої матриці. Ранг матриці. Перетворення, які не змінюють ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. Теорема про загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків. Метод Гаусса.

Білінійні та квадратичні форми.

Квадратичні форми та їх зв'язок з білінійними формами. Класифікація квадратичних форм. Канонічний вигляд квадратичної форми. Метод Лагранжа. Метод Якобі приведення

квадратичної форми до канонічного вигляду. Критерій Сильвестра додатно та від'ємно визначеної квадратичної форми.

Лінійні оператори.

Визначення лінійного оператора. Дії з лінійними операторами. Зв'язок лінійних операторів з матрицями. Ядро та образ лінійного оператора. Обернений оператор. Необхідна та достатня умова існування оберненого оператора. Власний вектор та власні значення лінійного оператора, методи їхнього знаходження.

Перетворення при зміні базису.

Матриця переходу від одного базису до іншого. Перетворення координат векторів при зміні базису. Перетворення матриці лінійного оператора. Перетворення коефіцієнтів лінійних форм. Перетворення матриці білінійної форми.

Лінійні оператори в евклідових та унітарних просторах.

Визначення спряженого оператора. Властивості спряжених операторів. Ермітові (самоспряжені) оператори. Спектральні властивості ермітового оператора. Теорема про власний базис ермітового оператора.

Визначення ермітової півторалінійної форми. Теорема про приведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Теорема про приведення пари форм до канонічного вигляду. Визначення унітарного оператора. Властивості унітарного оператора. Визначення нормального оператора.

Теорема про власний базис самоспряженого оператора у лінійному евклідовому просторі. Визначення ортогонального оператора.

Частина 3. Математичний аналіз.

Мова математики, теорія границь, неперервність функцій.

Визначення межі числової послідовності. Критерій Коші існування межі числової послідовності. Теорема Вейерштрасса про існування границі монотонної обмеженої послідовності. Визначення границі функції за Коші. Перша та друга визначні границі. Еквівалентності, що впливають з визначних границь.

Визначення неперервності функції у точці і на множині. Класифікація точок розриву функції. Символи асимптотичного порівняння. Теорема про проміжне значення неперервної функції.

Диференційне числення та теореми, пов'язані з диференційованими функціями.

Похідна та диференціал функції. Визначення похідної функції в точці, її геометричний і фізичний зміст. Правила диференціювання. Визначення диференціала функції. Його геометричний зміст. Таблиця похідних. Теорема про зворотну функцію. Визначення похідних й диференціалів порядку, вищого за перший. Формула Лейбница.

Основні теореми про диференційовані функції: Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Формула скінченних приростів. Теорема (формула) Коші.

Формули Тейлора та Маклорена. Правило Лопітала.

Необхідна та достатня ознака строгої монотонності функції. Необхідна та достатня умови екстремуму функції. Опуклість функції та її асимптоти.

Комплексні числа.

Три форми запису комплексного числа та зв'язок між ними. Дії над комплексними числами. Формула Муавра. Знаходження кореня $n^{\text{го}}$ степеня з комплексного числа. Формули Ейлера зв'язку між $\sin z$, $\cos z$ і e^{iz} . Формула для обчислення логарифма $\text{Ln } z$.

Первісна та неозначений інтеграл. Найпростіші методи інтегрування.

Визначення первісної функції та неозначеного інтеграла від заданої функції. Основні властивості неозначеного інтеграла. Таблиця неозначених інтегралів. Заміна змінної в неозначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Універсальна тригонометрична підстановка. Універсальна гіперболічна підстановка. Розкладання многочлена на множники. Теорема Безу. Інтегрування найпростіших дробів.

Означений інтеграл.

Означений інтеграл, його визначення. Геометрична інтерпретація означеного інтегралу. Необхідна умова інтегрованості функції. Основні властивості означеного інтеграла: нормування, лінійність, монотонність, аддитивність. Інтегрування нерівностей. Перша та друга теорема про середнє для означеного інтегралу, їх геометрична інтерпретація. Формула Ньютона-Лейбниці. Формули заміни змінної і введення нової змінної в означеному інтегралі. Формула інтегрування частинами.

Застосування означеного інтегралу для обчислення площ, довжин дуг кривих. Застосування означеного інтегралу для обчислення роботи, статичних моментів і моментів інерції. Знаходження координат центрів ваги кривих, плоских областей і просторових тіл.

Невласні інтеграли.

Визначення невластивого інтеграла. Збіжність і розбіжність невластивих інтегралів. Необхідна умова існування невластивого інтеграла. Критерій Коші збіжності невластивих інтегралів. Мажорантна ознака збіжності та ознаки одночасної збіжності-розбіжності невластивих інтегралів. Абсолютна та умовна збіжність інтегралів від знакозмінних функцій, зв'язок між ними. Ознаки Абеля та Дирихле збіжності інтегралів від знакозмінних функцій. Головне значення за Коші розбіжного інтеграла.

Числові та функціональні ряди.

Визначення ряду. Збіжні та розбіжні ряди. Критерій Коші збіжності ряду. Необхідна умова збіжності. Мажорантна ознака збіжності та ознаки одночасної збіжності-розбіжності рядів. Ознаки Коші, Даламбера збіжності знакопостійних рядів. Абсолютна та умовна збіжність рядів. Ознака Лейбниці умовної збіжності знакозмінного ряду. Ознаки Абеля і Дирихле умовної збіжності знакозмінних рядів. Функціональні ряди, область збіжності функціонального ряду. Степеневі ряди, коло і радіус збіжності степеневих рядів. Формула Коші-Адамара для радіуса збіжності степеневих рядів. Області збіжності рядів Маклорена для основних елементарних функцій.

Гама- та Бета-функції.

Гама- та Бета-функція, основні властивості і рекурентні співвідношення. Зв'язок між ними. Формули зниження і доповнення для Гама-функції.

Функції багатьох змінних.

Функції багатьох змінних: визначення, термінологія. Границя функції багатьох змінних. Повторні границі. Неперервні функції багатьох змінних. Неперервність складної функції.

Часткові похідні та часткові диференціали функцій багатьох змінних. Формула скінченних приростів для функції багатьох змінних. Похідна функції за напрямком. Градієнт функції. Теорема про змішані похідні. Визначення диференціала вищого за перший порядку. Формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа для функції багатьох змінних. Екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму диференційованої функції. Умовні екстремуми функцій багатьох змінних. Метод невизначених множників Лагранжа.

Кратні інтеграли.

Інтегральні суми для функцій багатьох змінних. Визначення кратного інтеграла. Необхідна умова інтегрованості функції багатьох змінних. Властивості кратних інтегралів: умова нормування, лінійність, адитивність, монотонність, інтегрування нерівностей, теорема про середнє. Теорема Фубіні про перехід у кратних інтегралах до повторного. Заміна змінних у кратному інтегралі. Якобіан переходу.

Криволінійні інтеграли першого та другого роду.

Криволінійний інтеграл першого роду, визначення, властивості та його фізичний зміст. Визначення і властивості криволінійного інтеграла другого роду. Формула Гріна для криволінійного інтеграла другого роду по плоскому замкненому контуру. Умова незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування.

Поверхневі інтеграли першого та другого роду.

Визначення поверхні в просторі. Координатні лінії поверхні. Нормаль до поверхні. Рівняння дотичної площини та нормальної прямої в заданій точці поверхні. Орієнтація поверхні та замкненого контуру на поверхні, взаємний зв'язок орієнтацій поверхні і контуру на ній. Поверхневий інтеграл першого та другого роду, їхні властивості та фізичний зміст.

Елементи теорії поля.

Скалярне поле і його характеристики. Лінії рівня скалярного поля. Градієнт скалярного поля. Векторне поле і його характеристики. Теорема Гаусса-Остроградського. Координатне визначення дивергенції векторного поля. Фізичний зміст дивергенції векторного поля. Фізичний зміст формули Гаусса-Остроградського.

Теорема Стокса. Координатне визначення ротора векторного поля. Фізичний зміст ротора векторного поля. Фізичний зміст формули Стокса. Потенційні поля. Умови потенційності векторного поля. Оператор Гамільтона (набла). Запис градієнта, дивергенції та ротора за допомогою оператора Гамільтона.

КРИТЕРІЇ

оцінювання рівня знань студентів

1. Виконання кожного завдання білета оцінюється балом за таблицею:

№ з/п	Кільк. балів	При оцінці відповіді на теоретичні питання	При оцінці розв'язання задачі
1	0	Виявлено, що студент виявив академічну недобросовісність	
2	1-20	Наведено лише визначення термінів, які входять до формулювання питання	Записано коротку умову, наведено діаграму або рисунок до задачі, записано основні закони з цієї теми
3	21-40	Наведено лише загальні відомості	Додатково до п. 2 вказано метод розв'язання задачі
4	41-60	Наведено нечітку відповідь	Додатково до п. 3 при правильному виборі методу розв'язання допущено грубі помилки
5	61-80	Наведено відповідь з незначними помилками	Додатково до п. 3 при правильному виборі методу розв'язання не доведено до кінця
6	81-90	Наведено правильну в цілому відповідь з порушеннями логіки викладення матеріалу або без належних ілюстрацій чи оформлення відповіді ускладнює розуміння тексту	Задачу доведено до правильної кінцевої формули і на тому припинено розв'язання
7	91-100	Повна бездоганна відповідь	Здобуто правильну кінцеву формулу та проведено її аналіз, перевірку на розмірність, вірно визначено числове значення.

2. Загальна оцінка фахового вступного випробування за шкалою від 100 до 200 балів розраховується за формулою:

$$\text{Оцінка} = (\text{П1} + \text{П2} + \text{П3}) / 3 + 100,$$

де П1, П2, П3 – бали за відповіді окремих завдань екзаменаційного білета.

3. Якщо «Загальна оцінка» не є цілим числом, то оцінка округлюється з урахуванням правил округлення.
4. Вступники, які набрали за шкалою 100-200 менше ніж 100 балів, отримують незадовільну оцінку та не допускаються до участі у конкурсному відборі.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

(основна)

1. Зима В.Г., Беляєв М.Р., «Неозначений та означений інтеграли: Підручник для фізиків та інженерів. Книга 1. Теоретичні відомості.» – К.: Майстер-клас, 2006. – 448 с.
2. Зима В.Г., Беляєв М.Р., «Неозначений та означений інтеграли: Підручник для фізиків та інженерів. Книга 2. Залачі, розв'язання, вказівки.» – К.: Майстер-клас, 2007. – 336с.
3. Леонов О.С., Гах А.Г. «Математичний аналіз. Теоретичні відомості, збірник задач із прикладами розв'язання у двох частинах. Частина 1», Навчальний посібник – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 153 с.
4. Нємченко К.Е. Аналітична геометрія : навчальний посібник / К.Е. Нємченко. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2012. – 272 с.
5. Беляєв М.Р., Беляєва Т.М., Павленко І.В., Ходусов В.Д. Вища алгебра для фізиків та інженерів. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2008.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

(додаткова)

1. Грималюк П.П., Кухарчук М.М., Ясінський В.В. Вища математика: У 2 ч.: Навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів за заг. ред. І.В. Скрипника. – К.: Віпол, 2004(ч.1–376с., ч.2 – 400с.).
2. Булдигін В.В., Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Коновалова Н.Р., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – К. : ТВіМС, 2011. – 224 с.

Голова фахової атестаційної комісії
ННІ «Фізико-технічний факультет»

Сергій ЛИТОВЧЕНКО

Відповідальний секретар
Приймальної комісії

Ганна ЗУБЕНКО

Затверджено на засіданні Приймальної комісії Харківського
Національного університету імені В.Н. Каразіна

Протокол № 2 від 20 березня 2025 р.